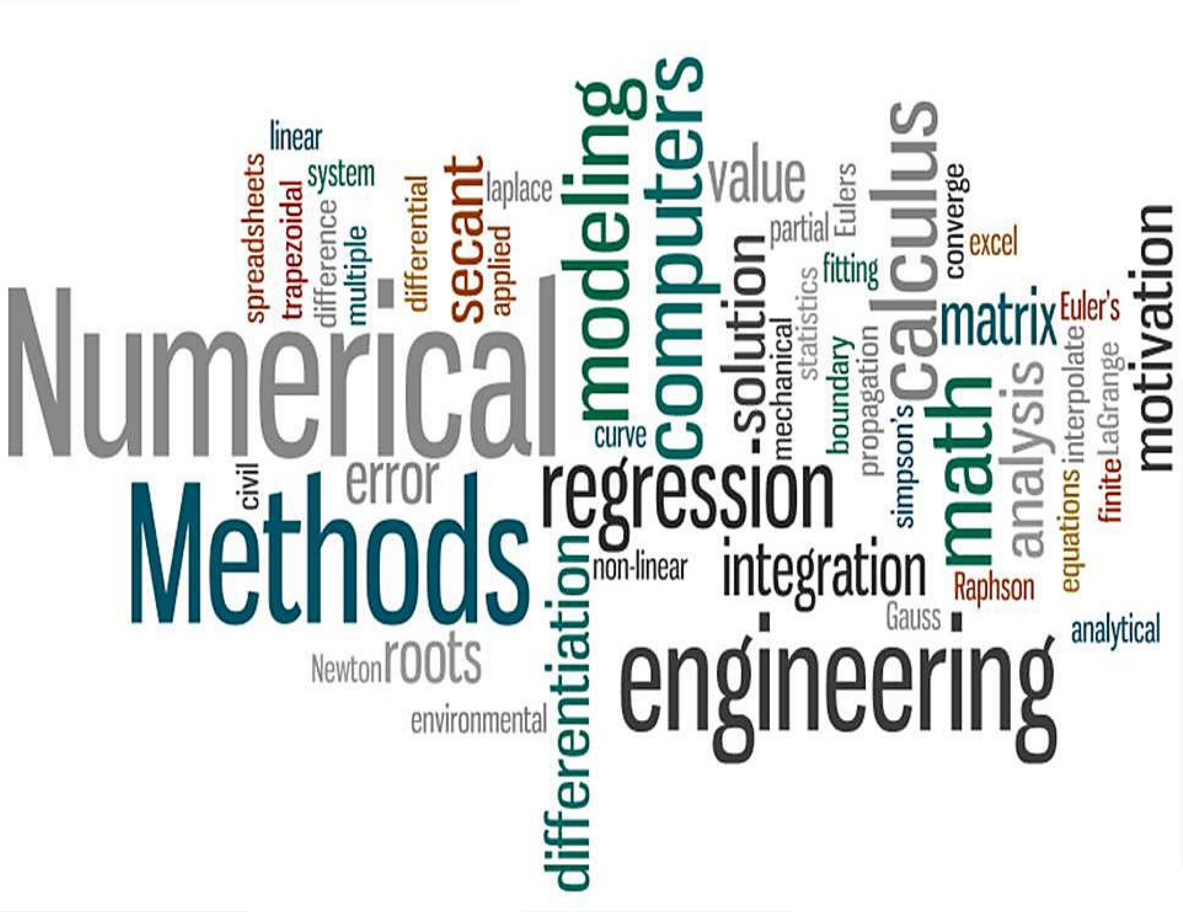
Numerical Analysis and Programming



28/10/2024

B. Haidar

Numerical Analysis

Numerical Analysis and Programming

Week No-02

Part-01

Approximation and Round-Off Errors

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

مقدمة

- يعتبر التحليل العددي أحد فروع الرياضيات الهامة حيث أنه يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي ويستخدم عادة في إيجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية حيث تكون النتيجة التي نحصل عليها نتيجة تقريبية أو حل تقريبي. هذا يعني أنه يوجد خطأ وعلينا حساب هذا الخطأ. إلا أنه لو استطعنا إيجاد الخطأ لاستطعنا إيجاد الحل الفعلي (الحقيقي) الأمر الذي يعني أن إيجاد الخطأ غير ممكن ونسعى بالتالي إلى إيجاد تقريب الخطأ أو حجم الخطأ أي تلك القيمة التي لايتجاوزها هذا الخطأ.
- إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالباً ماتمثل أطوال وقياسات أو قيم لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس وهي بحد ذاتها تقريبية. كذلك فإن الكثير من الأعداد الحقيقية لايمكن التعبير عنها بعدد منته من الأرقام فمثلاً العدد π يساوي تقريباً 3.14159 .
- السؤال هو "ما مقدار الخطأ الموجود في حساباتنا وهل يمكن اعتباره مسموحاً؟

Error Definition

- Since numerical solutions are approximated results, we have to specify how different the approximated results are from the true values, i.e. how large the error is.

True Error : The difference between the true solution value and the approximated (numerical) solution value,

True Value القيمة الحقيقية = Approximation التقريب + True Error الخطأ الحقيقي

إذا كان التقريب أكبر من القيمة الحقيقية فسيكون الخطأ سالباً بينما إذا كان أصغر من القيمة الحقيقية سيكون الخطأ موجباً. لذلك يتم التعبير عن الخطأ الحقيقي بشكل عام كقيمة مطلقة ويشار إليه بالخطأ المطلق.

Et = | True value – Approximation (+/-) |

Absolute Error

ننتقل الآن إلى السؤال التالي: لو قسنا طول جائز في جملة انشائية وقسنا طول الطريق بين حلب واللاذقية وحصلنا على قيمة واحدة للخطأ المطلق، أي القياسين سيكون أدق؟؟.

نستنتج أنه من عيوب هذاالتعريف (الخطأ المطلق) أنه لايأخذ بالحسبان حجم العينة "القيمة" المدروسة أي أنه لايعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس. لذلك سندخل مفهوم أو تعريف آخروهو الخطأ النسبي.

Error Definition

True fractional relative error :obtained by dividing the absolute error in the quantity by the quantity itself.

الخطأ الجزئي النسبي للقمية الحقيقية يساوي الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة الحقيقية.

$$\text{True fractional relative error } \boldsymbol{E_r} = \frac{|\text{true error}|}{|\text{true value}|}$$

على الرغم من أن هذا المقياس مفيد إلا أنه عادة مايتم ضرب الحطأ الجزئي النسبي بـ 100% للتعبيرعن الخطأ كنسبة مئوية. ويسمى الخطأ المئوي:

True percent relative error :

$$\text{True percent relative error, } \boldsymbol{\varepsilon_t} = \left|\frac{\text{true error}}{\text{true value}}\right| \times 100\% = \boldsymbol{E_r} \times 100\%$$

Error Definition

جَـامعة المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

Problem Statement: Suppose that you have the task of measuring the lengths of a bridge and a rivet and come up with 9999 and 9 cm, respectively. If the true values are 10,000 and 10 cm, respectively, compute (a) the true error and (b) the true percent relative error for each case.

Solution:

(a) The error for measuring the bridge is (True Value = Approximation + Error) : Et = 10,000 − 9999 = 1 cm

and for the rivet it is: Et = 10 − 9 = 1 cm

(b) The percent relative error for the bridge is $\varepsilon_t = \frac{\text{true error}}{\text{true value}} \times 100\%$: $\varepsilon_t = \frac{1}{10{,}000} \times 100\% = 0.01\%$

and for the rivet it is $\varepsilon_t = \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$

Thus, although both measurements have an error of 1 cm, the relative error for the rivet is much greater. We would conclude that we have done an adequate job of measuring the bridge, whereas our estimate for the rivet leaves something to be desired.

Error Definition con.

Estimated Relative Error: الخطأ المئوي للقيمة التقريبية

- For numerical methods, the true value will be known only when we deal with functions that can be solved analytically (simple systems). In real world applications, we usually not know the answer a priori. Then:

- بالنسبة للمثال السابق تم تزويدنا مسبقاً بالأطوال الحقيقة للجسر والبرغي. بينما في الواقع نادراً ماتكون هذه المعلومات متاحة. بالنسبة للطرق العددية لن نتمكن من معرفة القيم الحقيقية إلا عندما نتعامل مع التوابع التي يمكن حلها تحليلياً. أي أننا لن نعرف الإجابة الصحيحة مسبقاً. بالنسبة لمثل هذه الحالات يتمثل البديل فيما يلي:

النسبة المئوية للخطأ النسبي للقيمة التقريبية

$$\varepsilon_a = \frac{\text{approximate error}}{\text{approximation}} \times 100\%$$

الخطأ النسبي للقيمة التقريبية

$$\varepsilon_a = \frac{\text{current approximation} - \text{previous approximation}}{\text{current approximation}} \times 100\%$$

(+ / -)

Error Definition con.

Estimated Relative Error: الخطأ المئوي للقيمة التقريبية

النسبة المئوية للخطأ النسبي للقيمة التقريبية

$$\varepsilon_a = \frac{\text{approximate error}}{\text{approximation}} \times 100\%$$

الخطأ النسبي للقيمة التقريبية

تستخدم بعض الطرق العددية التكرار. يتم تنفيذ هذه العملية بشكل متكرر لحساب التقريبات (الحلول) الأفضل. وفي هذه الحالات يتم حساب الخطأ على أنه الفرق بين التقريبات (السابقة والحالية). وفي هذه الحالة تحسب النسبة المئوية للخطأ النسبي باستخدام العلاقة التالية:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{current approximation} - \text{previous approximation}}{\text{current approximation}} \times 100\%$$

(+ / -)

Error Definition con.

- Computations are repeated until stopping criterion is satisfied.

عند تنفيذ إحدى الطرائق العددية التكرارية يتوجب علينا أن نفكر في وقت التوقف عن التكرار. للقيام بذلك يجب تحديد قيمة مقبولة لنسبة الخطأ النسبي:

$$|\varepsilon_a| = \varepsilon_s$$

Pre-specified % tolerance based on the knowledge of your solution
النسبة المئوية للخطأ الأعظمي المرتكب

- If the following criterion is met

$$\varepsilon_s = \left(0.5 \times 10^{(2-n)}\right) \times 100\%$$

- n: عدد المنازل العشرية التي يتم التدوير إليها.

- you can be sure that the result is correct to at least ***n significant*** figures.

Error Estimation in Iterative Methods

يمكننا غالباً في الرياضيات تمثيل التوابع بسلسلة تايلور. على سبيل المثال يمكننا نشر التابع الأسي ب سلسلة ماك لوران على الشكل التالي:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

المطلوب حساب القيمة التقريبية لـ e^x والخطأ المئوي ε_S للقيمة التقريبية بحيث لايتجاوز الخطأ الأعظمي المرتكب الموافق لثلاثة منازل عشرية.

أولاً لنحسب الخطأ الأعظمي المرتكب الذي يضمن نتيجة صحيحة لثلاثة أرقام مهمة على الأقل:

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

وبالتالي سنضيف حدوداً إلى السلسلة حتى تقع قيمة الخطأ المئوي للقيمة التقريبية تحت القيمة السابقة

Error Estimation in Iterative Methods

يمكننا غالباً في الرياضيات تمثيل التوابع بسلسلة تايلور. على سبيل المثال يمكننا نشر التابع الأسي ب سلسلة ماك لوران على الشكل التالي:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

المطلوب حساب القيمة التقريبية لـ e^x والخطأ المئوي ε_s للقيمة التقريبية بحيث لايتجاوز الخطأ الأعظمي المرتكب المو افق لثلاثة منازل عشرية.

أولاً لنحسب الخطأ الأعظمي المرتكب الذي يضمن نتيجة صحيحة لثلاثة أرقام مهمة على الأقل:

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

وبالتالي سنضيف حدوداً إلى السلسلة حتى تقع قيمة الخطأ المئوي للقيمة التقريبية تحت القيمة السابقة

Error Estimation in Iterative Methods

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

1st term estimate:

2nd term estimate:

True relative error:

Estimated relative error:

Repeat for approximation to 3rd, 4th…term, we can get

Terms	Results	ε_t	ε_a
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

Numerical Analysis and Programming

Week No-02

Part-02

Truncation Errors and the Taylor Series

Source of Error

- Round-off error: أخطاء التدوير
  - Caused by the limited number of digits that represent numbers in a computer and
  - The ways numbers are stored and additions and substructions are performed in a computer
- Truncation Error: أخطاء الاقتطاع
  - Caused by approximation used in the mathematical formula of the scheme
- تنشأ هذه الاخطاء من العلاقات الرياضية حيث أننا في معظم الأحيان نقوم بكتابة التوابع بشكل سلاسل غير منتهية حيث أننا نكتفي بعدد منته من حدود هذه السلاسل وهذا مايؤدي إلى وجود (الأخطاء)
- Formulation Error: أخطاء الصيغ الرياضية
- تنشأ هذه الأخطاء عن بعض الصيغ التي تصف السلوك الفيزيائي أو الهندسي حيث تكون تقريبية في معظم الحالات. أو أنها تحتوي على ثوابت لا يمكن تحديدها بدقة متناهية
- Measurment Error: أخطاء القياس
- تنشأ هذه الأخطاء عن استخدام أجهزة القياس في قياس مقادير معينة. كالميزان، مقياس الحرارة، ساعة قياس التشوهات والانتقالات. حيث أنها قابلة للخطأ مهما بلغت الدقة.

Taylor Series

- The most important polynomials used to derive numerical schemes and analyze truncation errors
- With an infinite power series, it is exactly represents a function within a certain radius about a given point

Taylor Series - Taylor's Theorem

- If the function f and its first n + 1 derivatives are continuous on an interval containing a and x, then the value of the function at x is given by:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

- With the remainder Rn is defined as:

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Taylor Series

- Taylor series is of great value in the study of numerical methods. In essence, the Taylor series provides a means to predict a function value at one point in terms of the function value and its derivatives at another point. In particular, the theorem states that any smooth function can be approximated as a polynomial.
- A useful way to gain insight into the Taylor series is to build it term by term. For example, the first term in the series is:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Taylor Series

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Zero-order approximation

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

First-order approximation

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

Second-order approximation

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Taylor Series

n^{th} *order* approximation

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

$(x_{i+1}-x_i)= h$ *step size* (define first)

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} h^{(n+1)}$$

- Reminder term, R_n, accounts for all terms from (n+1) to infinity.

Taylor Series Approximation of a Polynomial

Example

: استخدم متسلسلة تايلور بدءاً من n=0 إلى n=6 لحساب القيمة التقريبية لـ $f(\frac{\pi}{3})$ عند $x=\frac{\pi}{4}$ للتابع $f(x)=\cos x$ واحسب ε_a لكل تكرار

$$x-a=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

والخطأ المئوي للقيمة الحقيقية

$$\varepsilon_t=\left|\frac{0.5-0.7071067811865476}{0.5}\right|\times 100\% \cong 41.4\%$$

Taylor Series Approximation of a Polynomial

لتقريب الدرجة الأولى ، نضيف حد المشتق الأول ، حيث $f'(x) = -\sin(x)$

$$f(\frac{\pi}{3}) \cong \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{12}) \cong 0.5219866587632823$$

حيث $\varepsilon_t \cong 4.40\%.$

للتقريب من الدرجة الثانية ، نضيف حد المشتق الثاني ، حيث $f''(x) = -\cos(x)$:

Taylor Series Approximation of a Polynomial

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\cos(\pi/4)}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cong 0.4977544914034251$$

حيث $\varepsilon_t \cong 0.449\%$.

وبالتالي ، فإن إدراج حدود إضافية يؤدي إلى تحسين التقدير. هذه العملية يمكن أن تستمر ، والنتائج المدرجة في الجدول أدناه

Taylor Series Approximation of a Polynomial

Order (n)	$f^{(n)}(x)$	$f(\pi/3)$ Taylor	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	cos(x)	0.707106781	41.4%
1	−sin(x)	0.521986659	4.40%
2	−cos(x)	0.497754491	0.449%
3	sin(x)	0.499869147	0.0262%
4	cos(x)	0.500007551	0.00151%
5	−sin(x)	0.500000304	0.0000608%
6	−cos(x)	0.499999988	0.00000244%

Taylor Series Approximation of a Polynomial

Example

Problem Statement: Use zero- through fourth-order Taylor series expansions to approximate the function:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

From $x_i = 0$ with h=1, that is, predict the function's value at $x_{i+1} = 1$

Solution:

Because we are dealing with a known function, we can compute values for *f(x)* between 0 and 1.

Taylor Series Approximation of a Polynomial